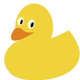
ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2023-2024

TD 5 : Devoir Maison

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercice 1. (Aut$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ — suite et fin)

Récapitulons ce qui a été vu dans le devoir maison :

- Pour tout $d \mid n$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ admet un unique sous-groupe d'ordre d. Il est cyclique et égal à $\left\langle \frac{n}{d} \right\rangle$. En particulier, les sous-groupes et quotients d'un groupe cyclique sont cycliques.
- Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- Pour p premier impair et n un entier, le groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $p^{n-1}(p-1)$.
- Si m et n sont premiers entre eux, alors $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

1. On prend $p = 2$.

(a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un entier impair μ_k tel que

$$5^{2^k} = 1 + \mu_k 2^{k+2}.$$

(b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, 5 est d'ordre 2^{n-2} dans $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$.

(c) En déduire un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \\ (\overline{\varepsilon}, \overline{k}) & \longmapsto & (-1)^\varepsilon 5^k \end{array}$$

2. Soit n un entier. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si et seulement s'il existe p premier impair et $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = p^m$ ou $n = 2p^m$.

Exercice 2. (Groupes dérivés)

Soit G un groupe. Pour $g, h \in G$, on définit le commutateur de g et h par

$$[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le groupe dérivé de G est le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$D(G) := \langle [g,h] \rangle_{g,h \in G}.$$

1. Quel est le groupe dérivé d'un groupe abélien ?

2. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

3. Montrer que le quotient $G^{ab} = G/D(G)$ est abélien. On l'appelle *l'abélianisé* de G.

4. Soit A un groupe abélien et $\varphi : G \to A$ un morphisme de groupe. Montrer que φ induit un morphisme $\overline{\varphi} : G^{ab} \to A$.

5. Soit $H \lhd G$ tel que G/H est abélien. Montrer que $D(G) \subseteq H$. Le groupe dérivé est le plus petit sous-groupe distingué de G dont le quotient est abélien.

6. Le dual de G est le groupe

$$G^* = \{\varphi : G \to \mathbb{C}^\times \text{ morphismes de groupes}\}$$

munit de la multiplication. Montrer que l'on a un isomorphisme $G^* \cong \left(G^{ab}\right)^*$.

Exercice 3. (Groupe dérivé de $\mathbb{H}_8$)

Récapitulons ce qui a été vu dans le devoir maison :

— $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec $IJ = K$, $I^2 = J^2 = K^2 = -1$. En particulier, $\mathbb{H}_8$ est engendré par I et J qui sont d'ordre 4.

— Tous les sous-groupes stricts de $\mathbb{H}_8$ sont distingués et cycliques.

— Le centre de $\mathbb{H}_8$ est $\{\pm 1\}$.

1. Calculer le groupe dérivé de $\mathbb{H}_8$.

2. Montrer que l'abélianisé de $\mathbb{H}_8$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. En déduire qu'il existe exactement 4 morphismes $\mathbb{H}_8 \to \mathbb{C}^\times$.

Exercice 4. (Groupe dérivé de D_{2n})

Soit $n \geqslant 3$. Récapitulons ce qui a été vu dans le devoir maison :

— Le groupe diédral D_{2n} est engendré par la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et par la symétrie orthogonale s par rapport à $\mathbb{R}$.

— D_{2n} est d'ordre $2n$ et tous ses éléments sont de la forme r^k ou $r^k s$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

— Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, r^k est d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$ et $r^k s$ est d'ordre 2.

— Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $sr^k s^{-1} = r^{-k}$.

1. Calculer pour k, $k' \in [\![0, n-1]\!]$, les commutateurs $[r^k, r^{k'} s]$ et $[r^k s, r^{k'} s]$.

2. En déduire que $D(D_{2n}) = \langle r^2 \rangle$.

3. On suppose n impair.

(a) Montrer que $\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle$.

(b) En déduire que l'abélianisé de D_{2n} est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) En déduire qu'il existe exactement 2 morphismes $D_{2n} \to \mathbb{C}^\times$.

4. On suppose n pair.

(a) Montrer que si n est pair, alors $\langle r^2 \rangle$ est d'indice 2 dans $\langle r \rangle$.

(b) En déduire que l'abélianisé de D_{2n} est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) En déduire qu'il existe exactement 4 morphismes $D_{2n} \to \mathbb{C}^\times$.

Exercice 5. (Groupe des automorphismes de D_{2n})

Soit $n \geqslant 3$ un entier.

1. Soit $\varphi \in D_{2n}$, montrer qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\ell \in [\![0, n-1]\!]$ avec $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$ et tel que

$$\varphi(r) = r^k \quad \text{et} \quad \varphi(s) = r^\ell s.$$

2. Montrer que pour tout couple (k, ℓ) comme ci-dessus, il existe un automorphisme $\varphi_{k,\ell}$ qui vérifiant $\varphi_{k,\ell}(r) = r^k$ et $\varphi_{k,\ell}(s) = r^\ell s$.

3. Montrer que le groupe des automorphismes de D_{2n} est isomorphe au groupe des matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} k & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right).$$

4. Montrer que $\mathrm{Aut}(D_6) \cong D_6 \cong S_3$.

5. Montrer que $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$.

Exercice 6. (Présentation de $\mathbb{H}_8$)

1. Vérifier que tous les éléments de $\mathbb{H}_8$ sont de la forme $I^k J^\ell$ avec $k \in \{0,1\}$ et $\ell \in [\![0,3]\!]$.
2. Soit G un groupe engendré par deux éléments i, j d'ordre 4 et tels que $i^2 = j^2$ et $iji^{-1} = j^{-1}$.
   - **(a)** Montrer que tous les éléments de G sont de la forme $i^k j^\ell$ avec $k \in \{0,1\}$ et $\ell \in [\![0,3]\!]$.
   - **(b)** Montrer que G a exactement 8 éléments.
   - **(c)** En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{H}_8$.

Exercice 7. (Classes de conjugaisons)

1. Montrer que les classes de conjugaison de $\mathbb{H}_8$ sont les suivantes :

$$\{1\}, \quad \{-1\}, \quad \{\pm I\}, \quad \{\pm J\}, \quad \{\pm K\}.$$

2. **(a)** Montrer que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, la classe de conjugaison de r^k est $\{r^k, r^{-k}\}$.
   - **(b)** En déduire que les rotations de D_{2n} forment $\frac{n}{2}+1$ classes de conjugaisons si n est pair, et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair.
3. **(a)** Montrer que la classe de conjugaison de s est $\langle r^2 \rangle s$.
   - **(b)** En déduire que les symétries de D_{2n} forment une seule classe de conjugaison si n est impair, et 2 si n est pair.
4. En déduire que D_{2n} a $\frac{n}{2}+3$ classes de conjugaison si n est pair, et $\frac{n+1}{2}+1$ si n est impair. En particulier, $\mathbb{H}_8$ et D_8 ont le même nombre de classes de conjugaison.

Exercice 8. (Groupes d'ordre 8)
Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

1. Justifier que G n'admet pas d'élément d'ordre 8 et au moins un élément g d'ordre 4. On note H le sous-groupe engendré par g.
2. Montrer que H est distingué.
3. Soit $h \in G \setminus H$. Montrer que $h^2 \in \{e, g^2\}$, et que $hgh^{-1} = g^{-1}$ (on rappelle que l'on a supposé G non abélien).
4. Montrer que s'il existe $h \in G \setminus H$ d'ordre 2, alors $G \cong D_8$.
5. Montrer que si tous les éléments de $G \setminus H$ sont d'ordre 4, alors $G \cong \mathbb{H}_8$.
6. En déduire qu'il existe 2 groupes non abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près : D_8 et $\mathbb{H}_8$.
7. Montrer qu'il existe 3 groupes abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Exercice 9. (Groupes d'ordre 6)
Soit G un groupe d'ordre 6.

1. Justifier que G admet deux éléments σ et τ d'ordres 3 et 2 respectivement.
2. Montrer que si σ et τ commutent alors $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si σ et τ ne commutent pas, alors $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ et que $G \cong D_6$.
4. En déduire qu'il existe deux groupes d'ordre 6 à isomorphisme près : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $D_6 \cong \mathfrak{S}_3$.